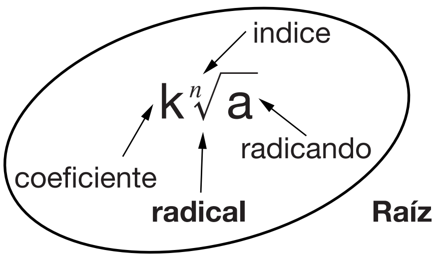
Raíces, radicandos y radicales

Para que no se te olvide

Una raíz es una expresión de la forma $k\sqrt[n]{a}$, en la que $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \Re$. Donde, si a es negativo, n tiene que ser impar. A la raíz también se le conoce como radical.

$\sqrt{64} = \pm 8$ $\sqrt{-64} = \notin \Re$

$\sqrt{64} = \pm 8$ $\sqrt{64} = \pm 8$



Raíces equivalentes

Al utilizar la propiedad del exponente fraccionario y al multiplicar el exponente fraccionario por un fraccionario, se obtiene una fracción equivalente:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}} \qquad \sqrt[n]{9^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

Si se multiplica o divide el índice y el exponente de una raíz por un mismo número natural, se obtiene otra raíz equivalente.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

¡Hacia la meta!

Simplifica y racionaliza de ser necesario.

$$\frac{\sqrt[3]{270x^{20}}}{\sqrt[3]{5x}}$$

Inténtalo

Simplifica y racionaliza de ser necesario.

$\sqrt[4]{36}$ $\sqrt[9]{27x^6}$

La matemática...

Si piensas en un mundo sin ella…
NO EXISTE.

(Sarah I. Nieves Rivera, 2010)

Destreza del día I

Sumar, restar y multiplicar raíces

Se pueden sumar o restar los coeficientes expresiones radicales semejantes. Estas son las que tienen la porción radical igual.

$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

$2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$

$= 7\sqrt{7} - 9\sqrt{5}$

Para multiplicar raíces, es necesario que éstas tengan el mismo índice. Se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

$(4\sqrt{5})\cdot(3\sqrt{3}) = 12\sqrt{15}$

$(2\sqrt{3}+1)\cdot(5\sqrt{3}-2) =$

$10(3) - 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2$

$= 28 + 2\sqrt{3}$

Si tienen diferentes índices, se reducen a un índice común y luego se multiplican los radicandos.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27}$

$\text{m.c.m}(2,3,4) = 12$

$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3}$

$= \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} =$

$\sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$

Inténtalo

Simplifica y racionaliza de ser necesario.

$\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} =$ $\qquad \dfrac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{16}} =$ $\qquad \dfrac{3}{\sqrt{2}} =$ $\qquad \dfrac{8}{\sqrt{6}} =$ $\qquad \dfrac{9}{\sqrt{12}} =$

Destreza del día II

Dividir y racionalizar raíces

Para dividir raíces, es necesario que éstas tengan el mismo índice. Se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

Si tienen diferentes índices, se reducen a un índice común y luego se dividen los radicandos.

La racionalización consiste en quitar un radical denominador. Existen 3 casos:

$$\frac{a}{b\sqrt{c}},\ \frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}\ \text{y}\ \frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} =$$

$$\sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} =$$

$$\sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}}$$

$$= \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Otros ejemplos:

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

Problema del día

Estrategia: Volver sobre los pasos

Una finca de chinas clasifica las chinas de grado A por su peso, que fluctúa entre 8 y 9 onzas. Piensan ordenar cajas de envío donde puedan acomodar 3 docenas de chinas grado A en 3 capas. Cada capa tiene una configuración de 3 chinas por 4 chinas. El peso de las chinas guarda relación con el diámetro de éstas por la fórmula $p = \frac{d^3}{4}$, donde p es el peso en onzas y d el diámetro en pulgadas. ¿Cuál es el tamaño de la caja que necesitan ordenar? Se ordenan en unidades completas.

Entiende ⟶ Se necesita calcular el tamaño de una caja de envío.

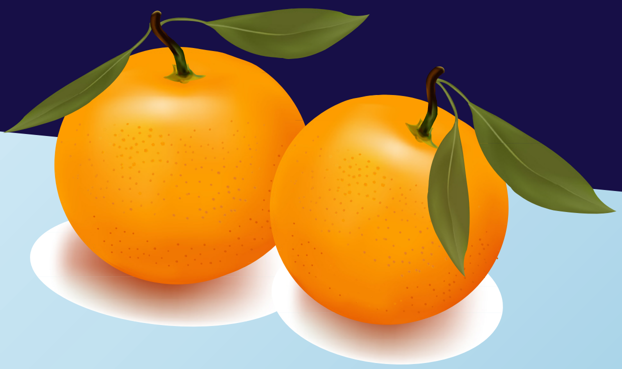
Planifica ⟶ Se debe volver sobre los pasos de la fórmula por manipulación para tenerla expresada en relación al diámetro.

Resuelve ⟶

$$8 \leq p \leq 9$$
$$8 \leq \frac{d^3}{4} \leq 9$$
$$32 \leq d^3 \leq 36$$
$$\sqrt[3]{32} \leq \sqrt[3]{d^3} \leq \sqrt[3]{36}$$
$$3.17 \leq d \leq 3.30$$

Como deben ordenar la caja en un tamaño general, se tomará la medida mayor. De alto se acomodan 3 capas de chinas, 3(3.30 pulgs.) = 9.90 pulgadas. De ancho es lo mismo que de alto y de alto son 4 chinas, 4(3.30 pulgs.) = 13.30 pulgadas.

Revisa ⟶ La caja que deben ordenar debe ser 14 pulgs. × 10 pulgs. × 10 pulgs.



Resuelve los siguientes problemas verbales.

1) El tiempo t que tarda un objeto libre en caer de una altura h está dada por la fórmula $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ donde g es la fuerza de gravedad, que es igual a 32 pies por segundo al cuadrado. Si una bola se suelta desde una ventana a 64 pies de altura, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

2) Los científicos han determinado que para crear gravedad en una nave espacial en órbita, ésta debe rotar N veces por segundo. Se usa la fórmula $N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}$, donde g es la gravedad de la tierra (9.8 m/s2), r es el radio de rotación y π es aproximadamente 3.1416. ¿Cuántas rotaciones por minuto debe realizar la nave espacial para que ésta produzca una gravedad parecida a la de la Tierra, si el radio es 2500 metros?

3) Carlos y María lanzaron una roca desde 150 pies de una colina. Encuentre el tiempo que tarda en segundos si la piedra se acerca al suelo, dada la fórmula $t = \frac{1}{4}\sqrt{s}$, donde s es la distancia recorrida.

4) Para determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado se utiliza la fórmula $d = \sqrt{2l^2}$, donde l es la longitud del lado del cuadrado. Determine la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 8 cm.

¿Alcancé la meta?

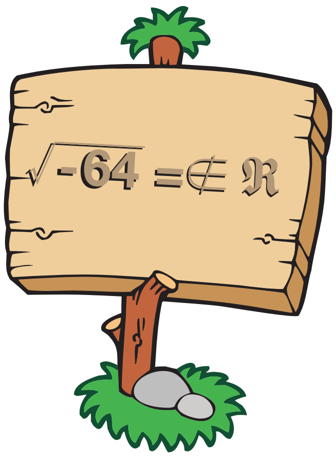
Simplifica y racionaliza de ser necesario.

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

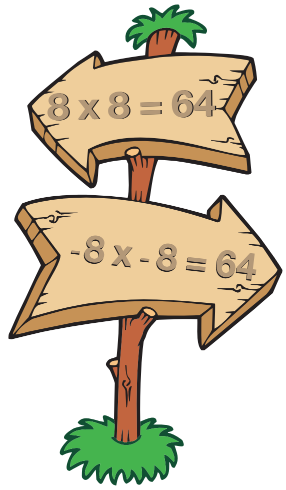
Zona desconocida de los complejos

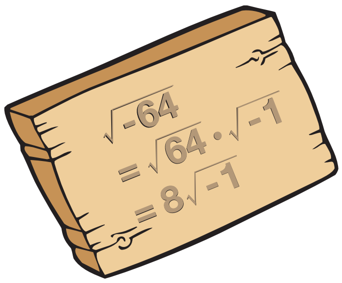
Para que no se te olvide

Recordemos una curiosidad de los reales.



¿Sabes por qué la raíz cuadrada de -64 no pertenece a los reales? Porque no existe número que, multiplicado por sí mismo, su producto sea un negativo.





Los **números imaginarios** se utilizan para obtener raíces con índice par y radicandos negativos. La solución es un número complejo.

$$x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9 \qquad \sqrt{x} = \sqrt{-9} \qquad x = \pm\sqrt{-9} \qquad x_1 = 3i, \quad x_2 = 3i$$

¡Hacia la meta!

Simplifica:

$(1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i)$

La matemática...

Es una herramienta para solucionar problemas.
(Rhonda Pérez García, 2010)

Destreza del día

Suma, reta y multiplicación de complejos

La **unidad imaginaria** ese basa en $\sqrt{-1}$ y se representa con la letra *i*. Significa que $\sqrt{-1}=i$.

Por lo tanto:

$\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$

Si 8*i* es un número imaginario escrito en la forma *bi*, *b* es un número real acompañado de la unidad imaginaria *i*.

Complejo = real ± imaginario

Ciclos de la unidad imaginaria

$i^1 = i = \sqrt{-1}$

$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i = -1 \cdot \sqrt{-1}$
$= -\sqrt{-1}$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$i^0 = 1$

Suma y diferencia de números complejos

Se realiza operando sumando y restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí.

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación de números complejos

Se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$

$(a + bi) \cdot (c + di) =$
$= ac + adi + bci + bdi^2$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

Inténtalo

Simplifica:

$\sqrt{-27}$

$-\sqrt{-18}$

Ejemplo # 1
Simplifica raíces cuadradas negativas.

- $\sqrt{-9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = 3i$

- $\sqrt{-12} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{12} = i\sqrt{12} = i\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$

Ejemplo # 2
Halla el resultado o diferencia de complejos.

- $(5 + 2\,i) + (-\,8 + 3\,i) - (4 - 2i) =$

$= (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i$

$\mathbf{= -7 + 7i}$

Ejemplo # 3
Halla el producto de complejos.

$(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) =$

$= 10 - 15i + 4i - 6i^2$

$= 10 - 11i + 6 =$

$= \mathbf{16 - 11i}$

Inténtalo

Halla la solución.

1) $(3i)\,(6i)$
2) $(3i - 5) + (9i + 8)$
3) $(2i + 3)\,(4i - 5)$

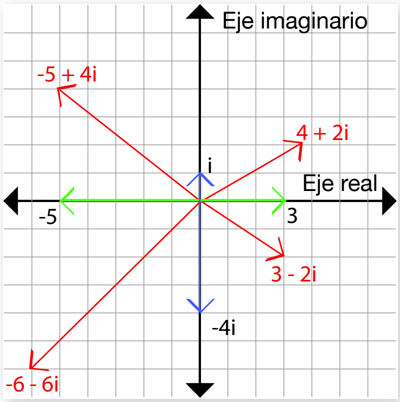
Problemas del día

Estrategia: Representar

Michael realizó un laboratorio sobre electricidad y obtuvo la siguiente serie de coordenadas complejas al aplicar expresiones de voltaje y corriente: -6 – 6*i*, 3 – 2*i*, *i*, -5, -5 + 4*i*, -4*i*, 4 + 2*i*, 3. Para su informe, necesita indicar la dirección de los resultados en un sistema de coordenadas de complejos. ¿Cómo ubicará las coordenadas complejas?

Entiende → Necesita ubicar las coordenadas complejas en un sistema.
Planifica → Para lograr ubicar las coordenadas, debe representar un sistema de coordenadas de complejos.

Resuelve → En el sistema de coordenadas de complejos, el eje horizontal representa los reales y el vertical, los imaginarios.



Revisa → En el eje real se encuentra un dato en los negativos, y otro en los positivos, al igual que en el eje imaginario. En cada uno de los cuadrantes complejos hay una coordenada.

Resuelve los siguientes problemas verbales.

1 **Para representar la distancia desde el origen hasta el número complejo, se utiliza la siguiente fórmula:**
$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
Determina la distancia de cada coordenada. DATO: Si observas, al sustituir en la fórmula sólo se escribe en real y el coeficiente del imaginario.

2 **Representa un sistema de coordenadas de complejos usando los siguientes valores:** $2i, 5 + 6i, 2 - 2i, -1 - 4i, 9i^2, -4 + 7i, 2i^4, -i$. **Determina la distancia de cada coordenada. Usa papel cuadriculado de ser necesario.**

Infórmate

División de números complejos

Al igual que en las expresiones radicales en que el denominador no puede estar en forma radical, en los complejos, el denominador de una fracción no debe permanecer complejo. Se resuelve aplicando el conjugado del complejo.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c)^2-(d)^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)}{(c)^2-(d)^2}+\frac{(bc-ad)i}{(c)^2-(d)^2}$$

$$\frac{3+2i}{1-2i}=\frac{3+2i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{3+6i+2i+4i^2}{(1)^2-(2i)^2}=\frac{3-4+8i}{1-(-4)}=\frac{-1+8i}{5}$$

Determinar el valor de las potencias de *i*.

¿Cuál es la representación de una potencia compleja dentro del ciclo, si le resta al exponente el múltiplo de 4 más próximo?

$$i^{22}=i^{22-20}=i^2=-1$$

$$i^{27}=i^{27-24}=i^3=-i$$

Recordatorio:

$-i=-\sqrt{-1}$