Radicales

Propiedades y Simplificación

Objetivos

1. Definir el concepto Radical
2. Estudiar las propiedades básicas de los radicales.
3. Utilizar las propiedades de los radicales para simplificar expresiones.

- Definir radical, índice y radicando.

Índice

Radical

$$\sqrt[n]{a}$$

Radicando

Radicales: ¿de dónde surgen?

- El concepto radical surge de los exponentes racionales. A continuación verás como se expresa de forma de exponente a forma radical equivalente.

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

La base se convierte en el radicando, el denominador del exponente es el índice y el numerador del exponente en el exponente del radicando.

Ejemplos. Expresa en forma radical equivalente.

1) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

2) $3x^{\frac{4}{5}} = 3\sqrt[5]{x^4}$

3) $(5p)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{(5p)^3}$

4) $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{x} - \sqrt{y}$

5) $(x+y)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(x+y)^2}$

6) $-a^{\frac{3}{4}} = -\sqrt[4]{a^3}$

7) $a + b^{\frac{4}{5}} = a + \sqrt[5]{b^4}$

8) $-3x^{\frac{1}{3}} = -3\sqrt[3]{x}$

Nota: Cuando el índice es 2 no se escribe.

Expresar en forma de exponentes.

- Para expresar en forma de exponentes hacemos el proceso inverso: el radicando pasa a ser la base, el índice el denominador del exponente y el exponente de radicando el numerador del exponente.

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

Ejemplos: Expresa en forma de exponente racional.

1) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

2) $-\sqrt[4]{a^3} = -a^{\frac{3}{4}}$

3) $a + \sqrt[5]{b^4} = a + b^{\frac{4}{5}}$

4) $-3\sqrt[3]{x} = -3x^{\frac{1}{3}}$

5) $3\sqrt[5]{x^4} = 3x^{\frac{4}{5}}$

6) $\sqrt[8]{(5p)^3} = (5p)^{\frac{3}{8}}$

7) $\sqrt[3]{x} - \sqrt{y} = x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{2}}$

8) $\sqrt[3]{(x+y)^2} = (x+y)^{\frac{2}{3}}$

Propiedades

1) $\sqrt[n]{x^n} = x$ Ejemplos

Si el índice y el exponente del radicando son iguales, podemos extraer la base.

2) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ Ejemplos

Si tenemos un producto adentro de un radical, lo podemos separar como el producto de los radicales.

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$ Ejemplos

Un radical adentro de otro radical, multiplicamos los índices.

4) $\sqrt[k\cdot n]{x^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{x^m}$ Ejemplos

Si el índice y el exponente del radicando tienen factor en común, los simplificamos.

5) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ Ejemplos

Un cociente adentro del radical, lo podemos separar como el cociente de dos radicales.

Ejemplos. Simplifica utilizando las propiedades.

1) $\sqrt[3]{24x^3y^5} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3x^3y^5} = \boxed{2xy\sqrt[3]{3y^2}}$

2) $\sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \boxed{\sqrt[6]{a^5}}$

3) $\sqrt[5]{\frac{x^2}{16y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{16y^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{2^4y^3}}\bullet\frac{\sqrt[5]{2y^2}}{\sqrt[5]{2y^2}} = \frac{\sqrt[5]{2x^2y^2}}{\sqrt[5]{2^5y^5}}$

$= \boxed{\frac{\sqrt[5]{2x^2y^2}}{2y}}$

4) $\frac{4a^3b^2}{\sqrt[3]{2ab^2}}\bullet\frac{\sqrt[3]{2^2a^2b}}{\sqrt[3]{2^2a^2b}} = \frac{\cancel{4}a^{\cancel{3}}\cancel{b^2}\,\sqrt[3]{4a^2b}}{\cancel{2ab}} = \boxed{2a^2b\sqrt[3]{4a^2b}}$

5) $\sqrt[5]{\sqrt{k^6}} = \sqrt[10]{k^6} = \boxed{\sqrt[5]{k^3}}$

6) $\sqrt{2x}\sqrt{8xy} = \sqrt{16x^2y} = \sqrt{2^4x^2y} = 2^2x\sqrt{y} = \boxed{4x\sqrt{y}}$

7) $\sqrt[4]{4a^2b^2} = \sqrt[4]{2^2a^2b^2} = \boxed{\sqrt{2ab}}$

8) $\sqrt[3]{8x^6y^9} = \sqrt[3]{2^3x^6y^9} = \boxed{2x^2y^3}$

9) $\sqrt[4]{\frac{3x^2}{8y^2}} = \frac{\sqrt[4]{3x^2}}{\sqrt[4]{8y^2}} = \frac{\sqrt[4]{3x^2}}{\sqrt[4]{2^3y^2}}\bullet\frac{\sqrt[4]{2y^2}}{\sqrt[4]{2y^2}} = \boxed{\frac{\sqrt[4]{6x^2y^2}}{2y}}$

10) $\sqrt{\sqrt[4]{a^8b^4c^6}} = \sqrt[8]{a^8b^4c^6} = a\sqrt[\cancel{8}]{b^{\cancel{4}}c^{\cancel{6}}} = \boxed{a\sqrt[4]{b^2c^3}}$

¡Fin!

Ej. Propiedad #1

Si el índice y el exponente del radicando son iguales, podemos extraer la base.

1) $\sqrt[5]{x^5} = x$

2) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

4) $\sqrt[6]{a^6} = a$

5) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

Regresar a Propiedades

Ej. Propiedad #2

Si tenemos un producto adentro de un radical, lo podemos separar como el producto de los radicales.

1) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

2) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

3) $\sqrt[3]{54a^5} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2a^3 a^2} = \sqrt[3]{3^3 a^3} \cdot \sqrt[3]{2a^2} = 3a\sqrt[3]{2a^2}$

4) $\sqrt{6}\sqrt{3} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Regresar a propiedades

Ej. Propiedad #3

Un radical adentro de otro radical, multiplicamos los índices.

1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}$

2) $\sqrt{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[8]{a^3}$

3) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

4) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{ab^2}}} = \sqrt[24]{ab^2}$

Regresar a propiedades

Ej. Propiedad #4

Si el índice y el exponente del radicando tienen factor en común, los simplificamos.

1) $\sqrt[6]{x^3} = \sqrt[2]{x}$

2) $\sqrt[4]{x^2 y^2} = \sqrt{xy}$

3) $\sqrt[6]{a^2 b^4} = \sqrt[3]{ab^2}$

4) $\sqrt[9]{x^6} = \sqrt[3]{x^2}$

Regresar a propiedades

Ej. Propiedad #5

Un cociente adentro del radical, lo podemos separar como el cociente de dos radicales.

1) $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sqrt[3]{\frac{24x^3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{24x^3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3x^3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2x\ \sqrt[3]{3}}{2} = x\ \sqrt[3]{3}$

3) $\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Si el radical del denominador no simplifica, entonces RACIONALIZAMOS el denominador.

¿Qué es racionalizar?

Forma más simple de un radical

1. Ningún radicando (la expresión que está adentro del radical) contiene una potencia mayor o igual al índice.

$\sqrt{x^5}$ ⟵ Viola condición 1

2. Ninguna potencia del radicando y el índice tienen factor común.

$\sqrt[6]{x^4}$ ⟵ Viola condición 2

3. No hay radicales en el denominador.

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ ⟵ Viola condición 3

4. No hay fracción adentro del radical.

$\sqrt{\frac{2}{5}}$ ⟵ Viola condición 4

Simplificación de Radicales

La racionalización del denominador

Al *proceso* de escribir una expresión racional con radicales en el denominador como otra expresión que no tiene radicales en el denominador se denomina como *racionalizar el denominador*.

“De igual forma podemos racionalizar el numerador.”

Aclaración: Para *racionalizar el denominador de una expresión* que tiene un solo término con raíz en el denominador, se multiplica el numerador y el denominador por una expresión con radical que eleve cada factor dentro del radicando a una potencia que coincida con el índice del radical.

Racionalizar